数理解析研究所講究録
626巻 1987年 142-156

Vector bundles over quaternionic Kähler manifolds

大阪大学 理学部 D.2 新田貴士 (Takashi Nitta)

quaternionic Kähler manifold とはその holonomy 群が $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の部分群に還元する Riemannian manifold を言う。この論説においては、quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle にある種の connection を定義してその性質を調べるのが目的である。以下に従って述べる。

§1. 定義

4n次元の Riemannian manifold が quaternionic Kähler とはその holonomy 群が $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の部分群に還元し、かつ $n=1$ の場合は Riemannian manifold として Einstein, self-dual の場合をいう。即ち M の tangent bundle TM の frame bundle が fibre $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の部分群なる principal bundle P に還元する。

そこで $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の説明を少ししておこう。$\mathbb{H}$ を四元数体とする。$\tilde{\rho}$ を $Sp(n)\times Sp(1)$ の $\mathbb{R}^{4n}\,(\simeq \mathbb{H}^n)$ への自然な表現とする。つまり $\tilde{\rho}$ は次で定義されている。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\tilde{\rho}: & Sp(n)\times Sp(1) & \longrightarrow & SO(4n) & \text{on } \mathbb{R}^{4n}(\simeq \mathbb{H}^n) & & \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \\
 & (h_1, h_2) & \longmapsto & \tilde{\rho}(h_1,h_2): & \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\
 & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & & & h & \longmapsto & h_1 h h_2^{-1}.
\end{array}
$$

この時 $\tilde{\rho}(-id,-id)=\tilde{\rho}(id,id)$ でしかも

$$\mathrm{Ker}\,\tilde{\rho} = \{(id,id),(-id,-id)\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

となり準同型定理より $\mathrm{Im}\,\tilde{\rho} = Sp(n)\times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$

N-2

である。 $\mathrm{Im}\,\tilde{\rho}$ (= Image of $\tilde{\rho}$) を $Sp(n)\cdot Sp(1)$ と書いた。$\tilde{\rho}$から決る $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{R}^{4n}$ ($\simeq \mathbb{H}^n$) への表現を ρ とする。ρを調べよう。そのためにまず ρ を複素化して調べる。ρ の複素化 $\rho^{\mathbb{C}}$ は $Sp(n)\times Sp(1)$ の $(\mathbb{R}^{4n})^{\mathbb{C}}$ ($\simeq (\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$) への表現 $\tilde{\rho}^{\mathbb{C}}$からきている。 $Sp(n)\times Sp(1)$ の表現が $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の表現におちるかどうかは、$\mathbb{Z}_2$ ($\simeq \{(id, id), (-id, -id)\}$) で不変かどうかだけが問題だから 以下では、めんどうなので同じ記号（〜をつけない）で書くことにする。 $\rho^{\mathbb{C}}$ は $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$への自然な表現である。

$(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}} = (\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H})^{\mathbb{C}} = \mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ であることに注意する。そこで ρ_n (resp. ρ_1) を $Sp(n)$ (resp. $Sp(1)$) の $\mathbb{C}^{2n}$ ($\simeq \mathbb{H}^n$) (resp. $\mathbb{C}^2$ ($\simeq \mathbb{H}$)) への自然な表現, 即ち、

$$\rho_n : Sp(n) \hookrightarrow SU(2n) \quad \text{on } \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$$
$$(\text{resp. } \rho_1 : Sp(1) \hookrightarrow SU(2) \quad \text{on } \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H})$$

とすると、上のことから

$$\rho^{\mathbb{C}} = \rho_n \otimes \rho_1$$

となる。 従って、

$$TM = \underset{(\rho_n \otimes \rho_1)_{real}}{P \times_{\rho} (\mathbb{R}^{4n})}, \quad TM^{\mathbb{C}} = \underset{\rho_n \otimes \rho_1}{P \times_{\rho^{\mathbb{C}}} (\mathbb{C}^{4n})},$$

$$T^*M = \underset{(\rho_n^* \otimes \rho_1^*)_{real}}{P \times_{\rho^*} (\mathbb{R}^{4n})}, \quad T^*M^{\mathbb{C}} = \underset{\rho_n^* \otimes \rho_1^*}{P \times_{\rho^{*\mathbb{C}}} (\mathbb{C}^{4n})},$$

ここで（　）$_{real}$ は表現の real form を表わした。

quaternionic Kähler manifold は twistor space と呼ばれる complex manifold を $S^2 (= \mathbb{P}^1\mathbb{C})$-bundle として持つことが知られている。$\rho_1'$ を $Sp(1)\ (\simeq SU(2))$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への自然な作用とします。すると、$\rho_1'(-id) = \rho_1'(id)$ より、この作用は $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用に自然に拡張できる。つまり、$Sp(n)$ の方は動かさずに $Sp(1)$ の方を ρ_1' で作用させる。その $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用を ρ_1'' と書いておきます。quaternionic Kähler manifold M の twistor space Z とは、

$$Z = P \times_{\rho_1''} \mathbb{P}^1\mathbb{C} \qquad \text{である。}$$

Salamon [S] によって Z には様々の構造が入る事が知られている。例えば、Z には自然に complex structure が入る。fibre $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2$ の anti-podal map が Z 上に

$\tau : Z \longrightarrow Z$ $(\tau^2 = id)$ なる map を定める。
更に M の Riemannian manifold としての scalar curvature が正の時に Z は自然に Kähler manifold になる。

§2. 問題とその背景

以下では、次の問題を考える。
"quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle に canonical な connection を定義してその性質を調べる。"

問題の意味を説明するために 上の canonical とはどういうことかを例で説明する。

例1. N を complex manifold, F を N 上の C^∞-Hermitian vector bundle とする。 ∇ を F 上の Hermitian connection とする時、 ∇ が $(1,0)$- connection とは、その curvature R^∇ が End F valued type-$(1,1)$ form である時, 即ち

$$R^\nabla \in \Gamma(N, \mathrm{End}\,F \otimes \Lambda^{1,1} T^* N)$$

をいう。その時、(1,0)-connection ∇ を用いてF上に complex structure が入ることが知られている。その意味で (1,0)-connection は complex manifold 上の Hermitian vector bundle に canonical な connection である。

例2. 例1の場合に加えて、Nを Kähler manifold とする。即ち、Kähler form が存在し、Kähler form をかけるという

$$L : \Lambda^{p} T^{*}N \longrightarrow \Lambda^{p+2} T^{*}N$$

なる operator が存在する。通常の様に L の adjoint を

$$\Lambda : \Lambda^{p+2} T^{*}N \longrightarrow \Lambda^{p} T^{*}N$$

と書く。その時 ∇((1,0)-connection)が Einstein-Hermitian connection とは、ある定数cが存在して

$$\sqrt{-1}\,(id \otimes \Lambda) R^{\nabla} = c\, id_F \in \mathrm{End}\, F$$

の時をいう。Einstein-Hermitian connection は代数幾何の stable vector bundle と深い関係があることが知られている。そういう意味で Kähler manifold 上の Hermitian vector bundle には Einstein-Hermitian connection が <u>canonical</u> な connection である。

例3. N'を oriented 4次元 Riemannian manifold とする。その時 $*$ (star operator) が存在し $\Lambda^2 T^*N'$ に $*^2 = id$ を満たして作用する。$*$ の eigen value $+1$ なる eigen space を Λ_+ とし、eigen value -1 なる eigen space を Λ_- とすると、

$$\Lambda^2 T^*N' = \Lambda_+ + \Lambda_-$$

となる。$\Gamma(N', \Lambda_+)$ の元を self-dual form, $\Gamma(N', \Lambda_-)$ の元を anti-self-dual form という。そこでF'をN'上の metric を持つ vector bundle, ∇'をF'上の metric connection とする時、∇'が self-dual (resp. anti-self-dual) とは、その curvature $R^{\nabla'}$ が $\mathrm{End}\, F'$-valued self-dual form (resp. anti-self-dual form) の時をいう。すると self-dual connection, anti-self-dual connection 共に Yang-Mills connection になる。そういう意味で self-dual connection, anti-self-dual connection は oriented 4次元 Riemannian manifold 上の vector bundle に <u>canonical</u> な connection である。

§3. 結果

§2の例でもわかる様に、本質的なのは curvature の形である。そこで quaternionic Kähler manifold の 2 form の分解から始める。

$$\Lambda^2 T^*M = P \times_{\Lambda^2 \rho^*} \Lambda^2 \mathbb{R}^{4n} .$$

複素化すると

$$\Lambda^2 T^*M^{\mathbb{C}} = P \times_{\Lambda^2 \rho^{*\mathbb{C}}} \Lambda^2 \mathbb{C}^{4n} .$$

そこで、
$$\Lambda^2 \rho^{*\mathbb{C}} = \Lambda^2 (\rho_n^* \otimes \rho_1^*)$$
$$= \Lambda^2 \rho_n^* \otimes S^2 \rho_1^* + S^2 \rho_n^* \otimes \Lambda^2 \rho_1^* .$$

ω_n (resp. ω_1) を $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の symplectic form とする。即ち $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の $Sp(n)$ (resp. $Sp(1)$) 不変なる 2 form である。

$$\omega_n \in \Lambda^2 \rho_n^* \quad \text{かつ} \quad \mathbb{C}\omega_1 = \Lambda^2 \rho_1^* \quad \text{より}$$

$$\Lambda^2 \mathfrak{p}_n^* = \mathbb{C}\omega_n + \Lambda_0^2 \mathfrak{p}_n^*$$ と直交分解すると、

$$\Lambda^2 \mathfrak{p}^{*\mathbb{C}} = \omega_n \otimes S^2\mathfrak{p}_1^* + \Lambda_0^2\mathfrak{p}_n^* \otimes S^2\mathfrak{p}_1^* + S^2\mathfrak{p}_n^* \otimes \omega_1$$

となる。ところが各々の表現を調べてみると、3つ共 real form をもつことがわかる。従って、

$$\Lambda^2 \mathfrak{p}^* = (\omega_n \otimes S^2\mathfrak{p}_1^*)_{real} + (\Lambda_0^2\mathfrak{p}_n^* \otimes S^2\mathfrak{p}_1^*)_{real} + (S^2\mathfrak{p}_n^* \otimes \omega_1)_{real}$$

となる。この分解に応じて $\Lambda^2 T^*M$ は3つの subbundles に分解する。各々 A_2', A_2'', B_2 と書くと

$$\Lambda^2 T^*M = A_2' + A_2'' + B_2 \quad .$$

例えば、$n=1$ の時は $A_2''=\{0\}$ で $A_2'=\Lambda_+$, $B_2=\Lambda_-$ となる。そこで E を quaternionic Kähler manifold M 上の vector bundle (体は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$) とする。∇ を E 上の G-connection (G は compact group で その Lie algebra を $\mathfrak{g}$ と書く) とする時、∇ が A_2' (resp. B_2) - connection とは、その curvature R^∇ が $\mathfrak{g}_E$-valued A_2' (resp. B_2) - form の時をいう。ここで $\mathfrak{g}_E$ は adjoint bundle ($\subset$ End E)

である。例えば、$n=1$ の時は A_2'-connection (resp. B_2-connection) は self-dual connection (resp. anti-self-dual connection) と一致する。

するとと自然な疑問として、A_2'-connection, B_2-connection は Yang-Mills connection だろうか という事が浮かんでくる。それに対して次の Theorem が成り立つ。

<u>Theorem 1.</u> A_2'-connection, B_2-connection 共に Yang-Mills connection である。

更に、B_2-connection を用いて vector bundle valued の elliptic complex が存在する。まず form の分解から行う。$\Lambda^i(\rho_n^*\otimes\rho_1^*) = \Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^* + (\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)^\perp$ と分解し、2つの部分共 real form を持つことに注意すると、

$$\Lambda^i\rho^* = (\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)_{real} + ((\Lambda^i\rho_n^*\otimes S^i\rho_1^*)^\perp)_{real}$$

となる。この分解に応じて

$$\Lambda^i T^*M = A_i + B_i$$ と分解する。

$\Lambda^i T^* M$ の A_i 成分への projection を pr_i と書く。

<u>Theorem 2.</u> E を M 上の vector bundle で B_2-G-connection ∇ をもつとする。その時、次の sequence は elliptic complex である。

$$0 \to \mathcal{O}(E) \xrightarrow{d^\nabla} \mathcal{O}(E \otimes T^*M) \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}(E \otimes A_2) \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathcal{O}(E \otimes A_{2n}) \quad 0$$

ここで $d_i := (id \otimes pr_{i+1}) \circ d^\nabla$ とし、$\mathcal{O}(\ )$ で germ のつくる sheaf を表わす。

この elliptic complex を用いて B_2-G-connection の moduli space の次元を調べられる。E を Theorem 2 の様に M 上の vector bundle で B_2-G-connection ∇ をもつとする。即ち、E の frame bundle は fibre G なる M 上の principal bundle Q に還元される。
そこで、

$$G_Q := Q \times_{inner} G \quad , \quad \mathfrak{g}_Q := Q \times_{Ad} \mathfrak{g}$$

とする。E の connection ∇ から $\mathfrak{g}_Q$ に自然に connection ∇' が入る。$\Gamma(M, G_Q)$ は gauge group と呼ばれ、

$\{$E 上の B_2-G-connection$\}$

に connection の引き戻しとして作用する。

$$\{E\text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}/\Gamma(M, G_Q)$$

を 同値類という意味で

$$[\{E\text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$$

と書く。

<u>Theorem 3.</u> G を semisimple, ∇ を irreducible B_2-G-connection とする。その時, ∇ の infinitesimal deformation ((i.e.) $T_\nabla[\{E\text{上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$) は、次の complex の 1'st cohomology H^1 の subspace である。

$$0 \to \Omega(\mathfrak{g}_Q) \xrightarrow{d^{\nabla'}} \Omega(\mathfrak{g}_Q \otimes T^*M) \xrightarrow{d_1'} \Omega(\mathfrak{g}_Q \otimes A_2) \xrightarrow{d_2'} \cdots \xrightarrow{d_{2n-1}'} \Omega(\mathfrak{g}_Q \otimes A_{2n}) \to 0,$$

ここで $d_i' := (id \otimes pr_{i+1}) \circ d^{\nabla'}$ である。

更に、次の 1:1 対応がある。 $p: Z \to M$ を projection とする。

Theorem 4.

$\{(E, \nabla_E)$: M上の Hermitian vector bundle E with Hermitian B_2-connection $\nabla_E\}$

$$\Big\downarrow p^* \qquad 1:1$$

$\{(F, \nabla_F)$: Z上の holomorphic Hermitian vector bundle F with Hermitian (1, 0)-connection ∇_F s.t.

(i) F は $p: Z \to M$ の fibre 上 trivial,

(ii) connection ∇_F は τ で不変 $\}$.

ここで τ は section 1 で定義した $\tau: Z \to Z$ である。

Corollary 5. 特に (M, g) の scalar curvature が正の時（この時は twistor space Z は Kähler manifold になる事を section 1 で注意した），Theorem 4 の対応は次のようになる。

$\{(E, \nabla_E)$: M上の Hermitian vector bundle E with Hermitian B_2-connection $\nabla_E\}$

$$\Big\downarrow p^* \qquad 1:1$$

$\{(F, \nabla_F)$: Z上の holomorphic Hermitian vector bundle F with Einstein-Hermitian connection ∇_F s.t. (i) (ii) $\}$.

§4. 注意

この section では、M は scalar curvature 正で compact とする。E を M 上の Hermitian vector bundle とすると corollary 5 より

$P^*\{\text{Hermitian } B_2\text{-connection on } E\}$
$= \{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E$
$\quad \text{s.t. (i) (ii)}\}$

であった。右辺の { } の中の connection は条件が2つついているので1つづつ取り除いていくと、

$$\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i) (ii)}\}$$
$$\cap$$
$$\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i)}\}$$
$$\cap$$
$$\{\text{Einstein Hermitian connection on } P^*E\}$$ となる。

今, Hermitian connection を考えているので、E の frame bundle は fibre $U(r)$ ($r := \operatorname{rank}(E)$) なる principal bundle Q に還元する。Q を Z 上に持ち上げて

P^*Q とし P^*Q から $U(r)_{P^*Q}$ を

$$U(r)_{P^*Q} := P^*Q \times_{inner} U(r)$$

としてつくる。 $\Gamma(Z, U(r)_{P^*Q})$ の作用で、上の3つの { } を割って moduli space とする。即ち、

[{Einstein Hermitian connection on P^*E s.t. (i) (ii)}]

$\cap_1$

[{Einstein Hermitian connection on P^*E s.t. (i)}]

$\cap_2$

[{Einstein Hermitian connection on P^*E}] となる。

Itoh, Kim によって最後の [{ }] は特異点を持つ Kähler manifold になる事が知られている。

そこで、$\cap_2$ は Kähler submanifold に、$\cap_1$ は totally real submanifold になる。

reference

[S] S. M. Salamon: Quaternionic Kähler manifolds. Inv. Math., 67, 143-171 (1982).